UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS V (MA-2112)

Elaborado por
Samuel Alonso
14-10028
Ing. Telecom

24 de noviembre de 2016

Integrales Dobles, Cambio de Orden de Integración, Cambio de Variables, Volumen de una Región, Teorema de Green

Resolución Segundo Parcial 2012 Enero-Marzo 3-4

1. Sea
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\tan(x)} xy dy dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\cos(x-\frac{\pi}{4})} xy dy dx$$

   a) Invertir el orden de integración

   b) Calcular I

Nótese que para $x = \frac{\pi}{4}$, $\tan(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$. Por ende, se puede invertir el orden de integración de la siguiente forma

$$\int_0^1 \int_{\arctan(y)}^{\frac{\pi}{4}} xy dx dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arccos(y)+\frac{\pi}{4}} xy dx dy$$

En vez de calcular las integrales obtenidas, podemos calcular I directamente mediante las integrales dobles originales

Tomemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\tan(x)} xy dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2} x \cdot y^2 \Big|_0^{\tan(x)} \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2(x) dx$$

Podemos calcular la antiderivada de la integral, resultando

$$\int x \tan^2(x) dx = -\frac{x^2}{2} + \log(\cos(x)) + x \tan(x)$$

Evaluando

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \log(\cos(x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + x \tan(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi^2}{32} + \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{4} \right)$$

Tomemos ahora la segunda integral

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\cos{(x-\frac{\pi}{4})}} xydydx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2{(x-\frac{\pi}{4})}dx - \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} xdx$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\cos{(2x)} + \frac{1}{4}\sin{(2x)}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8}x^2\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{128}\left(-8+8\pi+3\pi^2\right) - \frac{3\pi^2}{128} = -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\pi$$

Finalmente

$$I = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi^2}{32} + \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\pi$$
$$= -\frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\pi = -\frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{16}(3\pi - 1)$$

2. Calcular la integral

$$\int_0^2\int_0^{2-x} e^{x+y}\cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)dydx$$

Tomemos el cambio de variables $u = y+x$, $v = y-x$. Puede verificarse que el sistema tiene soluciones únicas de u y v para todo x, y.

Ahora, dada la transformación lineal definida por el cambio de variables, se obtiene la región de integración

$$D = \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq u\leq 2,\ -u\leq v\leq u\right\}$$

Luego, se obtiene la integral

$$\iint_D e^u\cos\left(\frac{v}{u}\right)|J(u,v)|dvdu$$

Donde si

$$x = X(u,v) = \frac{1}{2}(u-v) \quad \text{y} \quad y = Y(u,v) = \frac{1}{2}(u+v)$$

Entonces

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial v} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial v}\end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

Por ende, la integral toma la forma

$$\frac{1}{2}\int_0^2\int_{-u}^{u} e^u\cos\left(\frac{v}{u}\right)dvdu$$

Operando

$$\frac{1}{2}\int_0^2\int_{-u}^{u} e^u\cos\left(\frac{v}{u}\right)dvdu = \frac{1}{2}\int_0^2 e^u\left[u\sin\left(\frac{v}{u}\right)\Bigg|_{-u}^{u}\right]du$$
$$= \sin{(1)}\int_0^2 ue^udu = \sin{(1)}\left[(u-1)e^u\Bigg|_0^2\right] = \sin{(1)}\cdot(e^2-1)$$

3. Calcule el volumen de la región

$$\Omega = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ (z + 2)^2 \geq 4(x^2 + y^2)\Big\}$$

Tomemos la transformación a coordenadas cilíndricas dada por

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta) \qquad z = k$$

La región correspondiente resulta

$$\Omega^* = \Big\{(r, \theta, k) : r^2 + k^2 \leq 1,\ (k + 2)^2 \geq 4r^2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\Big\}$$

Por ende, el volumen de la región Ω viene dado por

$$V_\Omega = \iiint_{\Omega^*} |J(r, \theta, k)| dr d\theta dk$$

Ahora hallemos los intervalos de integración para r y k (El intervalo de θ se encuentra en la definición de Ω^*).

De las ecuaciones

$$r^2 + k^2 \leq 1$$
$$(k + 2)^2 \geq 4r^2$$

véase que la primera ecuación describe una circunferencia de radio 1 y su interior en el plano kr. Podemos despejar k

$$k^2 \leq 1 - r^2$$
$$k \geq 2r - 2 \qquad \text{y} \qquad k \leq -2r - 2$$

Puesto que deseamos hallar el volumen de la intersección de las regiones, tomaremos sólo las ecuaciones $k \geq 2r - 2$ y $k^2 \leq 1 - r^2$. Podemos hallar los puntos donde las regiones se intersectan mediante

$$\sqrt{1 - r^2} = 2r - 2 \implies r_1 = 1$$
$$-\sqrt{1 - r^2} = 2r - 2 \implies r_2 = \frac{3}{5} \quad \text{o} \quad r_3 = r_1 = 1$$

Recordemos que para coordenadas cilíndricas

$$J(r, \theta, k) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$$

La integral del volumen resulta

$$V_\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3}{5}} \int_{-\sqrt{1+r^2}}^{\sqrt{1+r^2}} r dk dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{3}{5}}^{1} \int_{2r-2}^{\sqrt{1+r^2}} r dk dr d\theta$$

Resolvamos cada integral por separado. Tomando la integral de la izquierda y operando

$$izq: \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3}{5}}\int_{-\sqrt{1+r^2}}^{\sqrt{1+r^2}} r dk dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3}{5}} 2r\sqrt{1+r^2} dr d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left[(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{3}{5}}\right] d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(\left(\frac{34}{25}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) d\theta = \frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{34}{25}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

Ahora, tomando la integral de la derecha

$$der: \int_0^{2\pi}\int_{\frac{3}{5}}^{1}\int_{2r-2}^{\sqrt{1+r^2}} r dk dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{3}{5}}^{1}\left(r\sqrt{1+r^2} - 2r^2 + 2r\right) dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}r^3 + r^2\right]\Big|_{\frac{3}{5}}^{1} d\theta = \frac{2\pi}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\sqrt{8} - \left(\frac{34}{25}\right)^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{27}{125}\right) + \left(1 - \frac{9}{25}\right)\right]$$

$$= \frac{2\pi}{6}\left(\sqrt{8} - \left(\frac{34}{25}\right)^{\frac{3}{2}} - 2 + \frac{54}{125} + 3 - \frac{27}{25}\right) = \frac{2\pi}{6}\left(\sqrt{8} - \left(\frac{34}{25}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{81}{125} + 1\right)$$

Finalmente, el volumen de la región es

$$V_\Omega = \frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{34}{25}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) + \frac{2\pi}{6}\left(\sqrt{8} - \left(\frac{34}{25}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{81}{125} + 1\right)$$

4. Sean e_1, e_2 y e_3 las fronteras de los conjuntos

$$S_1 = \{(x,y) : -4 \leq x \leq 4,\ -4 \leq y \leq 4\}$$
$$S_2 = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$
$$S_3 = \{(x,y) : (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

Calcule

$$\int_C (x^3 + y)dy + (3x - y^2)dy$$

si

$$C = e_1 \cup e_2 \cup e_3$$

y cada una de las fronteras es recorrida en sentido horario.

Primero, consideremos la integral de línea pero ahora en sentido antihorario

$$\int_C -(x^3 + y)dy + (y^2 - 3x)dy$$

Podemos separar la integral de línea sobre C en varias integrales de línea sobre cada una de las curvas que la componen.

$$\int_C -(x^3 + y)dy + (y^2 - 3x)dy = \oint_{e_1} -(x^3 + y)dy + (y^2 - 3x)dy$$
$$+ \oint_{e_2} -(x^3 + y)dy + (y^2 - 3x)dy$$
$$+ \oint_{e_3} -(x^3 + y)dy + (y^2 - 3x)dy$$

Ahora, aplicaremos el Teorema de Green a cada una de las integrales de línea. Nótese que

$$e_1 = \partial S_1 \qquad e_2 = \partial S_2 \qquad e_3 = \partial S_3$$

Luego

$$\oint_{e_1} -(x^3+y)dy + (y^2-3x)dy = \iint_{S_1} 2dxdy = 128$$
$$\oint_{e_2} -(x^3+y)dy + (y^2-3x)dy = \iint_{S_2} 2dxdy = 2\pi$$
$$\oint_{e_3} -(x^3+y)dy + (y^2-3x)dy = \iint_{S_3} 2dxdy = 2\pi$$

Finalmente

$$\int_C (x^3+y)dy + (3x-y^2)dy = 128 + 4\pi$$

Nota: Este material fue elaborado por Samuel Alonso con ejercicios obtenidos del segundo parcial de Enero-Marzo del 2012 (3-4), y fue realizado para el uso de toda la comunidad académica.

Samuel Alonso
Carnet: 14-10028
Ingeniería en Telecomunicaciones
Twitter: @zickpic

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com